

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

Гилемханова Э.Р., студент,

Русинов А. А., к.ф.-м.н., доцент

Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия

Чиглинцева А.С., д.ф.-м.н., доцент,

УГНТУ, г. Уфа, Россия

Аннотация: метод конечных объемов является одним из основных численных методов для решения дифференциальных уравнений, связанных с физическими процессами. Он широко применяется в различных областях науки и инженерии, включая гидродинамику, теплопередачу, механическую деформацию и многие другие задачи, где требуется моделирование потоков.

Ключевые слова: дискретизация, гибкость, применение.

Метод конечных объемов для задач конвекции-диффузии был впервые предложен в работах Годунова (1959), Тихонова и Самарского (1962). На западе основополагающие работы по этому методу выполнены примерно в то же время Хиртом.

Метод основывается на дискретизации пространства, разделяя его на конечные объемы, в которых уравнения сохранения для рассматриваемых количеств (например, массы, импульса, энергии) формулируются и решаются. Каждый конечный объем имеет свое значение переменной, и связь между соседними объемами моделируется через потоки[1].

1. Дискретизация

В рамках метода конечных объемов рассматривается сетка, состоящая из ячеек (конечных объемов). Каждая ячейка имеет свои границы, и все вычисления ведутся в отношении этих ячеек. Важно, что все потоки (входящие и исходящие) через границы ячеек учитываются, что обеспечивает соблюдение законов сохранения.

2. Уравнения сохранения

Для каждого конечного объема формулируется закон сохранения соответствующей физической величины (например, массы, момента или энергии). Эти уравнения интегрируются по объему и на его границах, что позволяет связывать значения на границах соседних ячеек.

3. Численное решение

Система уравнений для всех конечных объемов может быть представлена в виде алгебраических уравнений. Далее применяются численные методы, такие как метод Эйлера, метод Рунге-Кутты или другие подходы для решения этих уравнений[2].

Пример

В качестве простого примера можно рассмотреть основные принципы метода на уравнении неразрывности для сжимаемой жидкости.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho U) = 0. \quad (1)$$

Выделим контрольный объем жидкости, ограниченный параллелепипедом (рис.1). Часто задача может быть сведена к двумерной постановке и тогда контрольным объемом будет уже прямоугольник (рис.2).

Проинтегрируем уравнение (1) по рассматриваемому объему

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV + \int_V \text{div}(\rho U) dV. \quad (2)$$

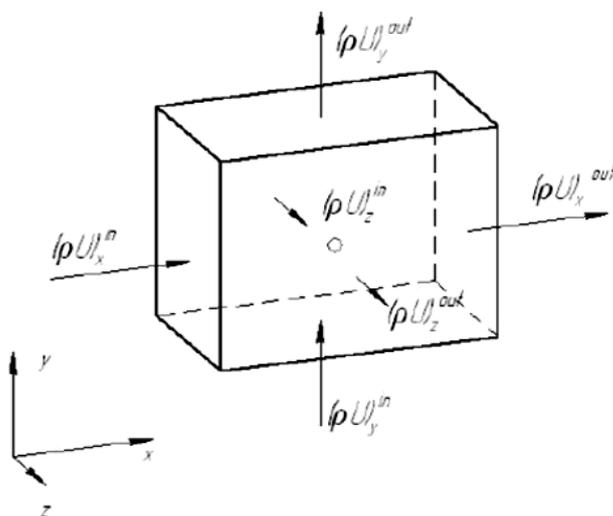


Рис.1. Контрольный объем в трехмерной постановке задачи

Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, получилось:

$$\int_V^1 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV + \int_S^1 \rho U * dS = 0. \quad (3)$$

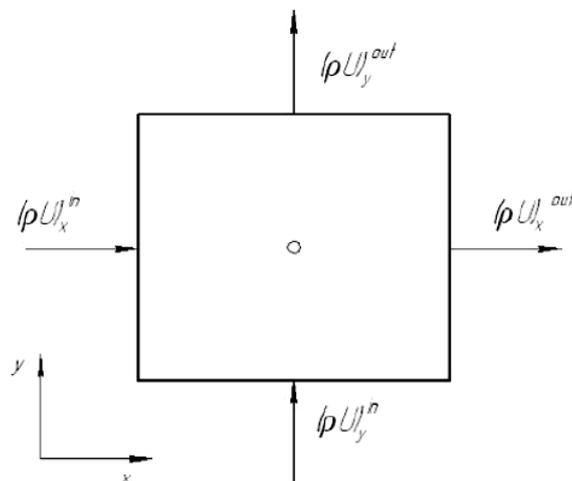


Рис.2. Контрольный объем в двумерной постановке задачи

Уравнения вида (3) являются основными в методе конечных объемов. Фактически они представляют собой законы сохранения для контрольного объема. Уравнение (3) собственно и является уравнением закона сохранения массы. Его физический смысл весьма прозрачен – масса контрольного объема может измениться только за счет потока жидкости, втекающей через его грани[3].

Преимущества метода конечных объемов

- *Сохранение физических свойств*: Основным преимуществом метода является его способность сохранять законы сохранения (массы, импульса, энергии), что делает его особенно подходящим для динамических систем.

- *Гибкость в геометрии*: Метод может быть легко применен к сложным геометрическим формам, что делает его универсальным инструментом для моделирования.

- *Разнообразие сеток*: Возможно использование как равномерных, так и неравномерных сеток, что позволяет адаптировать метод к особенностям решаемой задачи.

Ограничения и недостатки

Хотя метод конечных объемов обладает многими преимуществами, у него есть и некоторые ограничения:

- *Вычислительная сложность*: Для достижения высокой точности может потребоваться множество конечных объемов, что увеличивает затраты.
- *Потребность в хорошей сетке*: Качественный результат требует хорошо подобранной сетки, что может потребовать дополнительных усилий на этапе подготовки модели.

Применения метода конечных объемов

Метод конечных объемов находит применение в самых разных областях:

- *Гидродинамика*: Моделирование потоков жидкостей и газов, включая задачи обтекаемости.
- *Теплопередача*: Решение задач о распределении температуры в твердых телах.
- *Аэро- и гидродинамическое моделирование*: Используется для прогнозирования поведения воздушных и водных потоков.
- *Экологические модели*: Применяется для моделирования распространения загрязняющих веществ в атмосфере и водных ресурсах.

Метод конечных объемов представляет собой мощный инструмент для решения широкого круга задач, связанных с потоками и переносом. Его способность сохранять физические законы делает его предпочтительным для моделирования физических процессов, что подтверждается широким спектром применений в науке и инженерии. В условиях растущих требований к точности и скорости вычислений, развитие и адаптация метода конечных объемов продолжает оставаться актуальной задачей в численном анализе.

Литература

1. Вычислительная механика. Н.Г. Бурого. Москва, 2017. 286с.

2. Л.В. Быков, А.М. Молчанов, Д.С. Янышев. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2019. 200с.

3. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Учебное пособие / В.М. Ковеня, Д.В. Чирков. Новосибирск, 2013. 86с.