МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Баймиев В.А., студент,

Бигаева Л.А., к.ф-м.н., доцент,

Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия

Аннотация. В данной статье рассматривается метод наискорейшего спуска — один из базовых численных методов оптимизации. Приводится его теоретическое обоснование, описание алгоритма и анализ свойств. На примере минимизации квадратичной функции демонстрируется практическое применение метода. Обсуждаются преимущества и ограничения метода.

Ключевые слова: метод наискорейшего спуска, численные методы оптимизации, градиентный спуск, адаптивные методы

Метод наискорейшего спуска, также известный как метод градиентного спуска, — это основной инструмент численной оптимизации, который находит применение в самых разных областях, включая математическое моделирование, анализ данных и машинное обучение. Он используется для нахождения минимума функции путём последовательного приближения к оптимальному значению[1].

Метод основан на том, что направление антиградиента функции в текущей точке указывает путь наибольшего убывания её значения. Пусть задана функция *f(x)*, зависящая от вектора переменных x. Если x_k — текущая точка, то следующая точка определяется по формуле:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k),$$

где $\nabla f(x_k)$ – градиент функции в точке x_k, а α_k – шаг спуска.

Шаг α_k может быть [2]:

1. Фиксированным — постоянным на всех итерациях.
2. Адаптивным — вычисляемым для минимизации функции вдоль направления спуска.

Алгоритм метода

1. Инициализация. Выбирается начальная точка x_0, задаются параметры алгоритма, включая критерии остановки.

2. Вычисление градиента. Определяется градиент функции $\nabla f(x_k)$ в текущей точке.

3. Определение шага. Выбирается значение α_k.

4. Обновление точки. Переход к новой точке x_{k+1}.

5. Проверка остановки. Алгоритм прекращается, если выполнено условие сходимости, например, $\| \nabla f(x_k) \| \leq \varepsilon$, где ε — заданная точность [3].

Пример применения

Рассмотрим задачу минимизации квадратичной функции:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x,$$

где Q — симметричная положительно определённая матрица, b — вектор. Для этой функции градиент равен:

$$\nabla f(x) = Qx - b$$

Шаг α_k в этом случае можно вычислить аналитически:

$$\alpha_k = \frac{||\nabla f(x_k)||^2}{\nabla f(x_k)^T Q \nabla f(x_k)}$$

Используя эту формулу, мы можем эффективно минимизировать $f(x)$.

Преимущества метода

1. Простота и универсальность.

2. Возможность применения к различным типам функций.

3. Низкие вычислительные затраты на итерацию.

Недостатки метода

1. Медленная сходимость в задачах с плохо обусловленной гессианой.

2. Чувствительность к выбору шага α_k.

3. Возможность застревания в локальных минимумах для невыпуклых функций [5].

Заключение

Метод наискорейшего спуска остаётся одним из самых популярных и понятных методов оптимизации. Несмотря на свои ограничения, он находит применение в задачах с большим числом параметров и сложными функциями. Изучение его базовых принципов является важным шагом в освоении более сложных численных методов [4].

Литература

1. Гончаров В.А. Методы оптимизации: учебное пособие для вузов. – М: Издательство Юрайт, 2020. – 191 с.
2. Латыпов, И. И. Компьютерное моделирование / И. И. Латыпов, Л. А. Бигаева. – Бирск: Бирский филиал Уфимского университета науки и технологии, 2023. – 142 с. – EDN RRSXBP.
3. Жадан В.Г. Методы оптимизации. Часть 2: Численные алгоритмы. М. МФТИ, 2024. – 328 с.
4. Жадан В.Г. Методы оптимизации. Часть 3: Дополнительные главы. М. МФТИ, 2024. – 248 с.
5. Северин В.П. Методы многомерной безусловной минимизации. Х: ХПИ, 2013. – 160 с.