Вдовенко Н. Н., Шайхлисламова И. И.
г. Бирск, ФГБОУ ВПО Бирский филиал БашГУ

РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В последние десятилетия широкое распространение получил так называемый Фурье анализ, который нашел широкое применение, во всех областях научной деятельности начиная от физики до биологии. Метод анализа, который основывается на рядах Фурье, был введен в науку французским математиком Жан - Батист Жозеф Фурье. Фурье анализ известен так же под названием «гармонический анализ», так как ряд Фурье есть ни что иное, как представление функции в виде суммы синусоид и косинусоид.

Тригонометрическим рядом Фурье называют ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x) \qquad (1)$$

где a_k, b_k - числовые коэффициенты.

Следует отметить, что все тригонометрические функции, входящие в (1) имеют общий период $2l$. Такое определение тригонометрического ряда достаточно формально. Более естественным является другой «физический» подход.

Рассмотрим последовательность гармонических функций (гармоник) вида

$$A_k\sin(\frac{2k\pi}{T}x+\varphi_k)\ ,\ k=1,2,...;-\infty<x<\infty \qquad (2)$$

Они называются гармониками с кратными частотами, причем они все имеют общий период T. Рассмотрим суперпозицию этих гармоник

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(\frac{2k\pi}{T}x+\varphi_k)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\sin\varphi_k\cos\frac{2\pi k}{T}+A_k\cos\varphi_k\sin\frac{2\pi k}{T}x) \qquad (3)$$

Если положить, что $\frac{a_0}{2}=A_0,\ a_k=A_k\sin\varphi_k,\ b_k=A_k\cos\varphi_k,\ 2l=T$, то получим

$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(\frac{2k\pi}{T}x+\varphi_k)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x)$, таким образом, приходим к ряду (1).

Пусть теперь имеется функция $f^*(x)$, определенная на $(-\infty,\infty)$ и периодичная с периодом $2l$. Построим ряд (1), в котором коэффициенты a_k, b_k вычислены специальным образом по следующим формулам

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\cos\frac{k\pi}{l}dx, \quad (k=0,1,2,...) \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\sin\frac{k\pi}{l}dx, \quad (k=0,1,2,...) \end{aligned} \tag{4}$$

Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье функции $f^*(x)$, а сам ряд (1) в этом случае называется рядом Фурье функции $f^*(x)$. Записывают этот ряд в следующем виде

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x) \tag{5}$$

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[0,l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. На практике используются два:

а) продолжим функцию $f(x)$ на промежутке $[0,l]$ четным образом, тогда согласно (4) имеем $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}dx, \ (k=0,1,2,...)$, $b_k = 0$ и ряд Фурье примет вид $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi}{l}x$.

б) продолжим функцию $f(x)$ на промежутке $[0,l]$ нечетным образом. Тогда $a_k = 0$, $(k=0,1,2,...)$, (a_0 может быть отличным от нуля), а $b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}dx$ и ряд Фурье в этом случае будет иметь вид $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi}{l}x$.

Как уже говорилось, Фурье анализ имеет широкое применение во многих областях науки. Рассмотрим приложение ряда Фурье в физике на конкретном примере.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию тока, график которой выражает телеграфный сигнал, в случае периодичной передачи точек. Функция в пределах периода $[0,2\pi]$ имеет вид: $i(\omega t) = \begin{cases} I_2, & 0 < \omega t \le \pi, \\ I_1, & \pi < \omega t \le 2\pi; \end{cases}$

Решение. Вычислим коэффициенты ряда Фурье, по вышеуказанным формулам. При вычислении интегралов, их придется разделить на две части от 0 до π и от π до 2π, так как в каждой из них функция выражается по-своему.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_2 d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} I_1 d(\omega t) = \frac{1}{\pi} I_2 \omega t \,|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} I_1 \omega t \,|_{\pi}^{2\pi} = I_2 + \frac{I_1}{\pi}(2\pi - \pi) = I_2 + I_1$, тогда имеем

$a_0 = \frac{I_2 + I_1}{2}$. Далее найдем

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_2 \cos n\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} I_1 \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} I_2 (\frac{\sin n\omega t}{n}) \,|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} I_1 (\frac{\sin n\omega t}{2}) \,|_{\pi}^{2\pi} = 0$, в силу того, что значения синуса в 0, π, 2π равно нулю, имеем, что значение коэффициента a_n будет равняться нулю. Аналогично, найдем значение коэффициента b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_2 \sin n\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} I_1 \sin n\omega t d(\omega t) = -\frac{1}{\pi} I_2 (\frac{\cos n\omega t}{n}) \,|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} I_1 (\frac{\cos n\omega t}{2}) \,|_{\pi}^{2\pi} =$$
$$= -\frac{I_2}{\pi n}(\cos n\pi - 1) - \frac{I_1}{\pi n}(\cos n2\pi - \cos n\pi) = -\frac{I_2}{\pi n}((-1)^n - 1) - \frac{I_1}{\pi n}(1 - (-1)^n) =$$
$$= -(-1)^n \frac{I_2}{\pi n} + \frac{I_2}{\pi n} - \frac{I_1}{\pi n} + (-1)^n \frac{I_1}{\pi n} = \frac{I_2 - I_1}{\pi n} + (-1)^n (\frac{I_1 - I_2}{\pi n}) = \frac{I_2 - I_1}{\pi n}(1 + (-1)^{n-1})$$

Для данного коэффициента имеем, что если n - четное, то $(1+(-1)^{n-1})$=0, если же n- нечетное, то $(1+(-1)^{n-1})$=2. Тогда, ряд Фурье, для искомой функции, будет иметь следующий вид

$$i(\omega t) = \frac{I_2 + I_1}{2} + \frac{2(I_2 - I_1)}{\pi} \sum_{n=1,3,5,...}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}.$$

Таким образом, иллюстрируя простой пример, можно убедиться в том, насколько велико значение Фурье анализа в различных областях науки, особенно в современном мире, где быстрыми темпами развиваются технические науки.