МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТА

Осипов Г.Ю.., студент

Русинов А.А., к.э.н., доцент,

Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия

Чиглинцева А.С., д.ф.-м.н., доцент,

УГНТУ, г. Уфа, Россия

Аннотация. Многошаговые методы Рунге-Кутты основаны на хорошо известных одношаговых методах Рунге-Кутты для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с большей точностью и стабильностью за счёт использования нескольких предыдущих точек.Эти методы, появившиеся в результате работ Карла Рунге и Вильгельма Кутты примерно в 1900 году, превратились в различные явные и неявные подходы, особенно полезные для сложных высокоточных вычислений.В этой статье рассматриваются их теоретические основы и практическое применение.

Ключевые слова: Многошаговые методы Рунге-Кутты, численный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения,Карл Рунге, Вильгельм Кутта, метод Эйлера.

В численном анализе методы Рунге-Кутты представляют собой семейство неявных и итерационных методов, используемых для приближённого решения системы нелинейных уравнений. Эти методы были разработаны немецкими математиками Карлом Рунге и Вильгельмом Куттой в 1900 годах и широко используются по сей день. Наиболее известным представителем этого семейства является метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, который часто называют «метод Рунге-Кутты». [1] Многоэтапные методы повышают точность полученных значений, используется информация за несколько предыдущих периодов, а не только за текущий. Эти методы используют линейную комбинацию предыдущих точек и их производных значений, что позволяет повысить эффективность за счёт повторного использования полученных данных, вместо удаления их после каждого шага. Например, многоэтапный (k)-шаговый метод включает данные за $(i-1),(i-2)$ ... чтобы повысить точность решения. [2]

Многошаговые методы Рунге-Кутты обладают преимуществами, особенно в области вычислительной эффективности и точности при крупномасштабном моделировании. Традиционные методы, обычно с двумя итерационными процессами, несмотря на свою простоту и широкое применение могут быть ресурсоёмкими из-за необходимости выполнения нескольких этапов на каждом шаге вычислений. Многошаговые методы Рунге-Кутты используют информацию с предыдущих шагов, сокращая количество вычислений, необходимых для каждого предыдущего шага. Это приводит к значительному сокращению вычислительных затрат, что делает многоэтапные методы выгодными и точными для крупномасштабного моделирования.

Математические принципы, которые лежат за основу многошаговых методов Рунге-Кутты, расширяют классическую схему Рунге-Кутты для достижения более высокой точности и стабильности при решении задач с начальными условиями для ОДУ. Эти методы основаны на итеративном подходе, который включает метод Эйлера в качестве основного компонента и проходит через различных этапы приближения для более точных результатов. Классические методы аппроксимируют решение ДУ путём вычисления наклона в нескольких точках на каждом шаге и объединения этих вычислений для достижения точности более высокого порядка. Рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ первого порядка.[3]

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле [4]

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Где h −величина шага сетки по x.

Многошаговые методы будут выглядеть следующим образом:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

Где h − величина шага сетки по x, а вычисление нового значения проходит в sэтапов:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1)$$
$$\ldots$$
$$k_s = f(x_n + c_s h, y_n + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \ldots + a_{s,s-1} h k_{s-1})$$

В заключенииможно сказать, чтопри изучении многошаговых методов Рунге-Кутты мы описали их эффективность при решении дифференциальных уравнений по сравнению с традиционными подходами.Это исследование подчёркивает их превосходную точность и вычислительную эффективность, благодаря сочетанию преимуществ методов Рунге-Кутты и линейных многошаговых методов

Литература

1. Березин Н.С. Методы вычислений: в 2т. /Н.С. Березин, Н.П. Жидков. – М: Наука, 1960
2. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982.
3. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М. :Наука, 1978. – 386 с.