МЕТОД ОТОБРАЖЕНИЙ ИЛИ МЕТОД ЯКОБИАНОВ

Ханов М.Р., студент,
Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия
Русинов А.А., к.ф.-м.н.,доцент,
Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия
Чиглинцева А.С., д.ф.-м.н., доцент,
УГНТУ, г. Уфа, Россия

Аннотация. В статье рассматривается задача аппроксимации производных функций на неравномерных и неструктурированных сетках, методом отображений.

Ключевые слова: метод отображений, метод якобианов, неравномерные сетки, тетраэдральные сетки, численное дифференцирование

В численном анализе и вычислительной математике часто возникает задача аппроксимации производных функций, заданных на сетке. Для равномерных структурированных сеток эта задача решается относительно просто с помощью конечных разностей. Однако в случае неравномерных или неструктурированных сеток, таких как тетраэдральные сетки в трехмерном пространстве, проблема становится значительно сложнее. Метод отображений, также известный как метод якобианов, предлагает эффективный подход к решению этой проблемы, позволяя использовать простейшие аппроксимации производных на канонических ячейках и затем преобразовывать их обратно в физическое пространство.[1]

Метод отображений основан на идее преобразования произвольно ориентированной ячейки неравномерной сетки в каноническую ячейку простой формы, такую как отрезок, прямоугольник или параллелепипед, в параметрическом пространстве. Для этого используется преобразование координат, которое отображает узлы исходной ячейки на узлы канонической ячейки.[2]

Рассмотрим тетраэдральную ячейку, определенную четырьмя узлами (x_i, y_i, z_i), $i = 1,2,3,4$ Мы отобразим эту ячейку на каноническую ячейку в трехмерном параметрическом пространстве (ξ, η, θ), так что узел 1 находится в начале координат, а узлы 2, 3 и 4 расположены на осях ξ, η и θсоответственно, на единичном расстоянии от начала координат.

В этом параметрическом пространстве операции дифференцирования становятся тривиальными:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = f_2 - f_1, \frac{\partial f}{\partial \eta} = f_3 - f_1, \frac{\partial f}{\partial \theta} = f_4 - f_1$$

Однако нам необходимо найти производные в физическом пространстве (x, y, z). Для этого мы используем цепное правило дифференцирования:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Эти уравнения представляют систему линейных уравнений относительно неизвестных $(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial f}{\partial \theta})$. Коэффициенты этой системы являются частными производными координатx,yиzпо параметрамξ,ηиθ, которые составляют матрицу Якоби преобразования координат.[2,3]

Метод якобианов позволяет также получить формулы численного дифференцирования повышенной точности. Для этого необходимо повысить точность аппроксимации производных в параметрическом пространстве, например, путем введения дополнительных узлов, использования более точных интерполяционных полиномов или квадратурных формул.[3]

Литература

1. Быков А.А., Мухартова Ю.В. Разностные схемы, тема 1: курс специального практикума / Кафедра математики физического факультета МГУ им. Ломоносова. Москва, 2015 - 2016. Доступ свободный. URL: http://math.phys.msu.su/archive/2015_2016/374/tema1.pdf (дата обращения: 28.11.2024)

2. Бураго Н.Г. Вычислительная механика: текст лекций по численным методам вычислительной механики для студентов5 курса кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана/ кафедра прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Москва, 2017. Доступ свободный. URL: https://ipmnet.ru/~burago/papers/nummet.pdf(дата обращения: 28.11.2024)

3. Р.З. Даутов, М.Р. ТимербаевЧисленные методы. Приближение функций: учебное пособие. — Казань: Казан. ун-т, 2021. — 123 с. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F_222785104/drz.tmr.ChM_1.pdf(дата обращения: 28.11.2024)