ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТА И ЭЙЛЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нуриаслямова Р. Б., студент, БФ УУНиТ, г. Бирск, Россия

Русинов А.А., доцент, к.ф.-м.н., БФ УУНиТ, г. Бирск, Россия

Чиглинцева А.С., д.ф.-м.н., доцент, УГНТУ, г. Уфа, Россия

Аннотация. В данной статье представлены численные методы Эйлера и Рунге-Кутта 4-го порядка, реализованные с использованием языка программирования C# и графической библиотеки Windows Forms. Описаны основные принципы работы методов, а также их применение для решения дифференциальных уравнений. Результаты визуализированы в интерактивном интерфейсе, что позволяет наглядно демонстрировать эффективность и точность предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: метод Эйлера , метод Рунге-Кутта, C#, Windows Forms.

Численное решение прикладных задач всегда интересовало математиков. Крупнейшие представители прошлого объединяли в своих исследованиях изучения явлений природы, получение их математического описания, как иногда говорят, математической модели явления, и его исследование. Анализ усложненных моделей потребовал создания специальных, как правило, численных методов решения задач.

Прогресс в развитии численных методов способствовал постоянному расширению области применения математики в других научных дисциплинах и прикладных разработках, из которых, в свою очередь, поступали запросы на решение новых задач, стимулируя дальнейшее развитие вычислительной математики[1].

Системой дифференциальных уравнений n-го порядка называется система вида:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ .... \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

Системой линейных дифференциальных уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} x_1' = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + b_1 \\ x_2' = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + b_2 \\ .... \\ x_n' = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + b_n \end{cases}$$

Решением системы называется вектор:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .... \\ x_n(t) \end{cases}$$

В исследовании, будут использоваться линейные системы дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера является частным случаем методов первого и второго порядков, относящихся к классу методов Рунге-Кутта. Эти методы применяют для вычисления значения y_{i+1}, $(i = 0,1,...)$ через y_i и $f(x, y)$, определенных при некоторых специальным образом выбираемых значениях $x \in [x_i, x_{i+1}]$ и $y(x)$. На их основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Метод записывается в виде[3]:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2), i = 0,1...$$

Метод Рунге-Кутта требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Алгоритм метода записывается в виде [2]:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), i = 0,1\ldots \\ k_0 = hf(x_i, y_i) \\ k_1 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_0}{2}\right) \\ k_2 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_i + h, y_i + k_2\right) \end{cases}$$

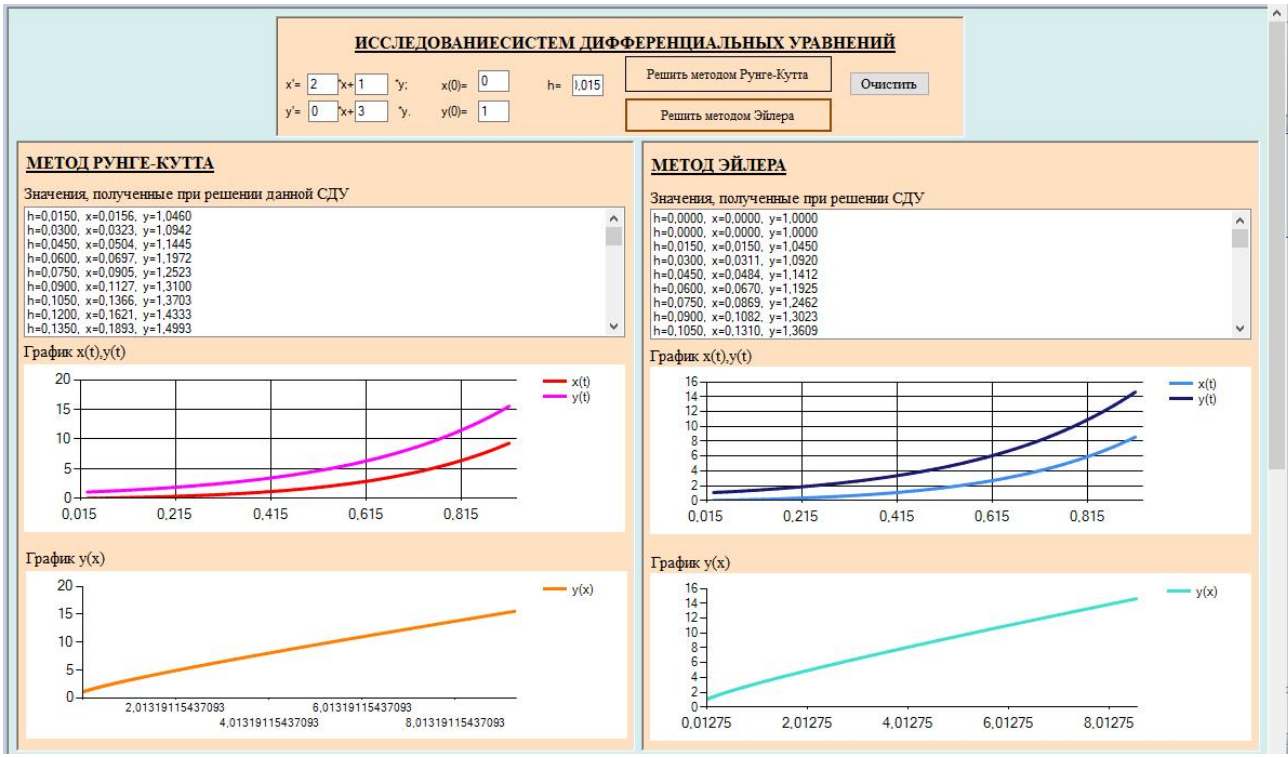
Для реализации численных методов решения систем дифференциальных уравнений в работе будет использоваться WindowsForms, написанная на языке C#.

Пример 1:

С помощью методов Рунге-Кутта и Эйлера определить численное решение задачи Коши для системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3y, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1, h = 0,015$$



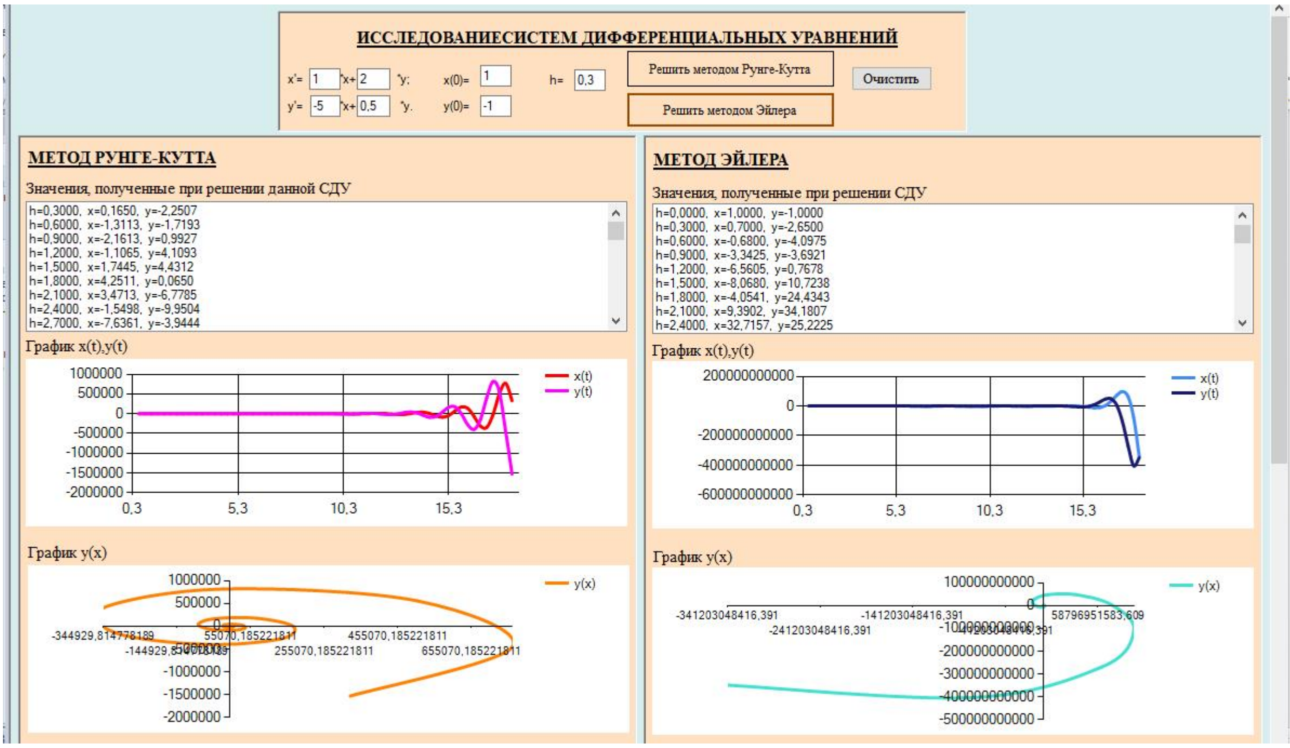
При решении задачи шаг равнялся 0,015, был небольшим. Из рисунка видно, что решение обоих методов имеют приблизительно одинаковый результат.

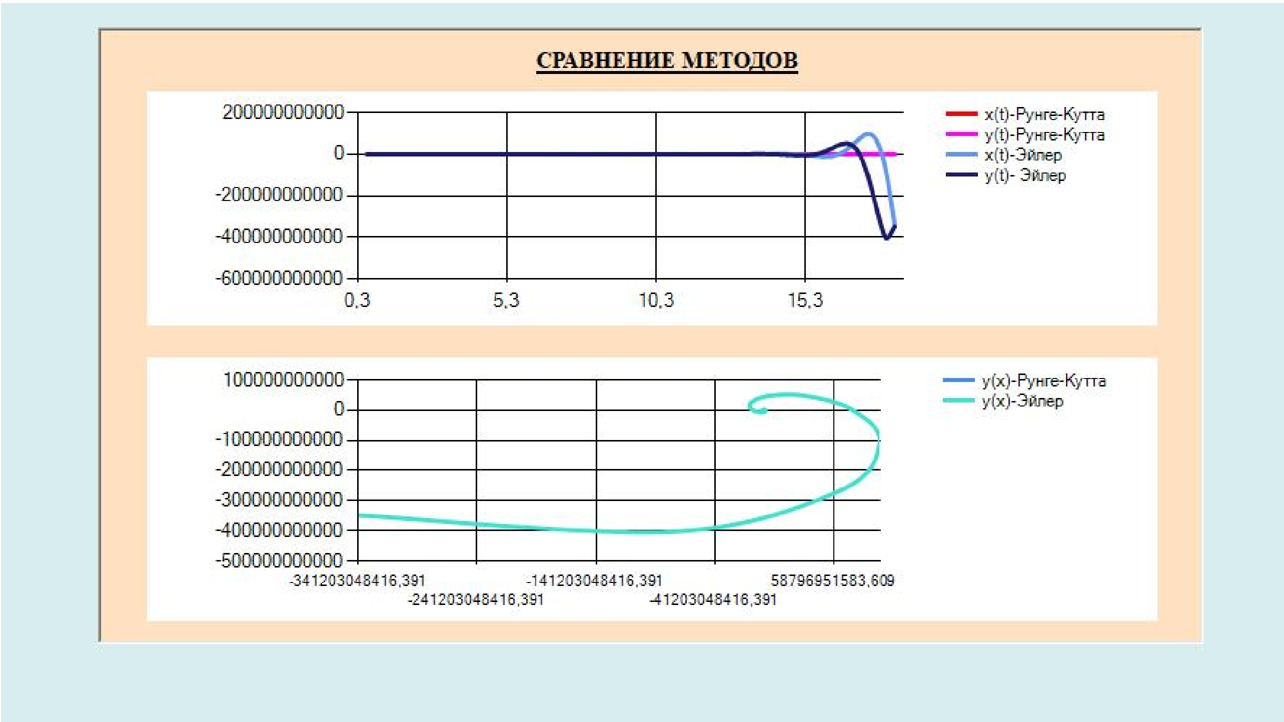
Пример 2:

С помощью методов Рунге-Кутта и Эйлера определить численное решение задачи Коши для системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -5x + 0,5y, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = -1, h = 0,3$$





При решении задачи шаг был увеличен, и равнялся 0,3. Из рисунка видно, что решение обоих методов имеют более различный результат. Метод Рунге-Кутта точнее.

Графики, полученные с помощью метода Эйлера и метода Рунге-Кутты, могут иметь некоторые различия. Метод Эйлера обычно дает менее точные результаты и может приводить к накоплению ошибок при больших временах. В результате, график, полученный с помощью метода Эйлера, может быть менее гладким и точным, чем график, полученный с использованием метода Рунге-Кутты.

Таким образом, были реализованы численные методы Эйлера и Рунге Кутта 4-го порядка с помощью графической библиотеки WindowsForms используя язык программирования C#. Был произведен анализ полученных результатов методов и сравнения их между собой.

Литература

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов - М: Наука, 2007. - 239 с.

2. Мышенков В.И., Мышенков Е.В. Численные методы. Ч. 2 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие для студентов специальности 73000 – М.:МГУЛ, 2005 – 22 с.:

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. -- 13-е изд. -- М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1985. -- 232 с.