# СХЕМА ГОДУНОВА

**Галиханов И.И.**, студент,
Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия
**Русинов А.А.**, к.э.н., доцент,
Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия
**Чиглинцева А.С.**, д.ф.-м.н., доцент,
УГНТУ, г. Уфа, Россия

**Аннотация.** Схема Годунова – это численный метод решения гиперболических систем уравнений, широко применяемый для моделирования процессов с разрывами, таких как ударные волны. В статье описаны основные этапы метода, его преимущества, ограничения и возможные модификации для повышения точности и эффективности. Рассмотрены примеры применения схемы в аэродинамике, гидродинамике, астрофизике и инженерных задачах.

**Ключевые слова:** схема Годунова, численные методы, гиперболические уравнения, задача Римана.

Схема Годунова – это численный метод, разработанный Сергеем Константиновичем Годуновым в 1959 году для решения гиперболических систем уравнений в частных производных. Этот метод представляет собой революционный подход, благодаря которому стало возможным моделирование процессов с разрывами решений, таких как ударные волны.Глубокая математическая основа и физическая корректность метода делают его основой для множества современных численных алгоритмов.

Основные этапы реализации схемы Годунова. Схема Годунова базируется на следующем пошаговом алгоритме, который гарантирует корректное и стабильное решение гиперболических уравнений:

1. Дискретизация расчетной области. Расчетная область делится на ячейки равного размера. Каждая ячейка характеризуется набором средних значений физических переменных: плотности $\rho$, скорости $v$, давления $p$. Эти средние значения считаются постоянными в пределах каждой ячейки.

2. Решение задачи Римана на границах ячеек. На каждой границе между соседними ячейками решается задача Римана, представляющая собой начально-краевую задачу для гиперболической системы уравнений.

Задача Римана начинается с предположения, что в двух соседних ячейках значения физических переменных различны (это создаёт разрыв). Решение этой задачи описывает, как разрыв со временем распадается, образуя волны различных типов: ударные волны, разрежения и контактные разрывы.

Для задач гидродинамики задача Римана определяется через уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{\partial ((E + p)v)}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

где $E$ – полная энергия на единицу объема.

Решение задачи Римана обеспечивает точный расчёт потоков $F_{i+1/2}$, которые необходимы для обновления переменных в каждой ячейке.

3. Обновление значений переменных. Значения физических переменных в ячейке обновляются с учётом потоков через её границы:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right),$$

где $u_i^n$ – значение переменной в ячейке $i$ на временном шаге $n$, $\Delta t$ – временной шаг, $F_{i+1/2}$ – поток через правую границу ячейки, а $F_{i+1/2}$ – поток через левую границу [2].

4. Проверка условия CFL. Условие стабильности Куранта-Фридрихса-Леви (CFL) требует, чтобы скорость распространения информации (максимальная характеристическая скорость $|v| + c$) не превышала отношение шага по времени $\Delta t$ к шагу по пространству $\Delta x$:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} max(|v| + c) \leq 1.$$

Если это условие нарушается, шаг по времени уменьшается.

Преимущества метода Годунова:

1. Физическая корректность. Благодаря использованию точного решения задачи Римана, схема Годунова сохраняет физические свойства модели, такие как законы сохранения массы, импульса и энергии.

2. Работа с разрывами. Схема эффективно обрабатывает разрывные решения, такие как ударные волны, без появления неустойчивых осцилляций.

3. Монотонность. Схема подавляет численные осцилляции, обеспечивая монотонное поведение решения.

Ограничения метода Годунова. Несмотря на свои преимущества, метод Годунова обладает следующими ограничениями:

1. Первый порядок точности.Схема имеет низкую точность на гладких решениях, что может приводить к численной диффузии.

2. Вычислительная сложность. Решение задачи Римана на каждой границе ячейки требует значительных вычислительных затрат.

3. Ограничение на шаг времени. Условие CFL может ограничивать размер временного шага, что приводит к большому числу итераций для моделирования процессов на длительных временных масштабах [3].

Модификации и расширения.Для преодоления недостатков схемы Годунова были разработаны её модификации:

1. Схемы второго порядка точности.Для повышения точности на гладких решениях используется реконструкция переменных с учётом их градиентов. Например, схема MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemesfor

Conservation Laws) добавляет пространственный градиент, повышая точность без значительного усложнения расчётов.

2. Методы высокого порядка. Схемы ENO (Essentially Non-Oscillatory) и WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) позволяют достигать высокого порядка точности, сохраняя устойчивость при работе с разрывами.

3. Аппроксимация задачи Римана.Для уменьшения вычислительных затрат вместо точного решения задачи Римана используются приближённые решения, такие как метод Хартена-Лакса-Ван Леера (HLL) или метод Роэ.

4. Адаптивные сетки.Применение адаптивных методов позволяет увеличивать разрешение в областях с высокими градиентами (например, вблизи ударных волн) и снижать его в гладких областях [1].

Примеры практического применения:

1. Аэродинамика. Схема Годунова используется для расчёта обтекания самолётов и космических аппаратов сверхзвуковыми потоками, где возникают ударные волны.

2. Гидродинамика. В гидравлических задачах метод применяется для моделирования паводков, анализа работы плотин и расчёта волн в каналах.

3. Астрофизика. В астрофизике схема Годунова помогает моделировать ударные волны в звёздных атмосферах, динамику сверхновых и распространение ударных волн в межзвёздной среде.

4. Технические задачи. Метод активно используется в задачах расчёта трубопроводов, газовых сетей и других инженерных систем, где важна точная передача разрывов [4].

Схема Годунова широко используется для численного решения гиперболических систем уравнений. Её способность точно обрабатывать разрывные решения обеспечила ей место в основе современных алгоритмов. Совершенствование методов, включая схемы высокой точности и адаптивные подходы, укрепило её значимость в вычислительной математике и прикладных исследованиях.

**Литература**


1. Бисикало, Я. В. Газодинамика тесных двойных звезд / Я. В. Бисикало, А. Г. Жилкин, А. А. Боярчук. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 630 с.
2. ВолковК. Н.,ДерюгинЮ. Н., ЕмельяновВ. Н.,КозелковА. С. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках / К. Н. Волков, Ю. Н. Дерюгин, В. Н. Емельянов, А. С. Козелков; под редакцией В. Н. Емельянова, К. Н. Волкова. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 416 с.
3. Волков, К. Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа: учебное пособие / К. Н. Волков, В. Н. Емельянов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 468 с.
4. Никишкин, С. И. Системы газоснабжения ракетно-космических комплексов. Автоматизация инженерного анализа и проектирования: монография / С. И. Никишкин, В. В. Котов. – Ковров: КГТА имени В. А. Дегтярева, 2021. – 316 с.