МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ АДАМСА

Белюшина Е.А., студент,

Русинов А.А., к.ф.-м.н., доцент,

Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия

Чиглинцева А.С., д.ф.-м.н., доцент,

УГНТУ, г. Уфа, Россия

Аннотация. Статья посвящена изучению многошаговых методов Адамса, используемых для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Рассматриваются теоретические основы методов Адамса, включая их классификацию на методы Адамса-Башфорта и методы Адамса-Моултона. Приводятся формулы для каждого типа методов. Обсуждаются преимущества и недостатки методов Адамса, а также их практическое применение в различных научных и технических дисциплинах.

Ключевые слова: многошаговые методы, методы Адамса, методы Адамса-Башфорта, методы Адамса-Моултона, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения.

Многошаговые методы являются одним из важнейших классов численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Они позволяют эффективно решать задачи, требующие большого количества шагов для достижения заданной точности. Одним из наиболее известных семейств таких методов является семейство методов Адамса, названное в честь Джона Кауча Адамса, который впервые предложил их в середине XIX века.

Многошаговые методы Адамса – это семейство численных методов, используемых для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Разберемся с понятием начальной задачи или задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка. Это задача называется задача отыскания решения этого уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям:

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0, \\
&y'(x_0) = y'_0, \\
&y''(x_0) = y''_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

В частности, для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ задача Коши состоит в отыскании его решения, которое при $x = x_0$ принимает значение y_0, т.е. $y(x_0) = y_0$ [1].

Многошаговые методы решения задачи Коши характеризуются тем, что решение в текущем узле зависит от данных не в одном предыдущем узле, как это имеет место в одношаговых методах, а от нескольких предыдущих узлов. Методы Адамса дают погрешность порядка $O(h^4)$.

Методы Адамса-Башфорта являются явными методами, то есть они не требуют решения нелинейных уравнений на каждом шаге.

Метод Адамса-Башфорта первого порядка (явный метод Эйлера)[3]:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n.$$

Метод Адамса-Башфорта второго порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}).$$

Метод Адамса-Башфорта третьего порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}).$$

Метод Адамса-Башфорта четвертого порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}).$$

Методы Адамса-Моултона являются неявными методами, что означает, что на каждом шаге необходимо решить нелинейное уравнение относительно y_{n+1}.

Метод Адамса-Мултона первого порядка (неявный метод Эйлера):

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

Метод Адамса-Мултона второго порядка (неявный метод трапеций):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n).$$

Метод Адамса-Мултона третьего порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}).$$

Метод Адамса-Мултона четвертого порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n+2}).$$

Чтобы найти начальные значения y_0, y_1, y_2, y_3 для метода Адамса, нужно воспользоваться одношаговыми методами, например, методом Рунге-Кутта, методом Эйлера [2].

Согласно методу Рунге-Кутта 4-го порядка, последовательные значения y_i искомой функции yопределяются по формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \quad (i = 0,1,2,\ldots)$, а

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),$$
$$k_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}),$$
$$k_3^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}),$$
$$k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}).$$

Одним из главных преимуществ методов Адамса перед одношаговыми методами, такими как методы Рунге-Кутта, является их высокая эффективность при решении гладких задач. Однако они могут оказаться менее устойчивыми в случае наличия разрывов или резких изменений в решении. Кроме того, начальные условия для многошаговых методов должны быть известны заранее, что может потребовать дополнительных вычислений.

В сравнении с другими многошаговыми методами, например, методами Милна или Гира, методы Адамса часто оказываются более простыми в реализации и имеют меньшую вычислительную сложность.

Методы Адамса широко применяются в различных областях науки и техники, где требуется решение систем ОДУ высокого порядка. Примерами таких областей являются механика, физика, химия, биология и многие другие. Особенно эффективны эти методы при моделировании динамических процессов, таких как движение планет, распространение волн или химические реакции.

Методы Адамса занимают важное место среди численных методов для решения ОДУ благодаря своей эффективности и простоте реализации. Они позволяют значительно сократить количество необходимых вычислений по сравнению с одношаговыми методами, сохраняя при этом высокую точность. Несмотря на некоторые ограничения, связанные с устойчивостью и необходимостью начальных условий, методы Адамса остаются популярными и востребованными инструментами в современной науке и технике.

Литература

1. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 400 с.

2. Лапчик, М.П. Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; ред. М. П. Лапчик. — Москва: Академия, 2007. — 384 с.

3. Бигаева Л.А., Латыпов И.И. Курс лекций по численным методам: учебное пособие для студентов физико-математического факультета. — Бирск, 2018. — 138 с.