МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В СРЕДЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ PASCAL

МЕТОД НЬЮТОНА

Вдовенко Н. Н., Шайхлисламова И. И.
г. Бирск, ФГБОУ ВПО Бирский филиал БашГУ

Существуют два метода минимизации функции, а именно методы минимизации функции первого порядка и методы минимизации второго порядка. Метод Ньютона относится к методам минимизации второго порядка.

***Определение*:** Если минимизируемая функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и производные $f'(x), f''(x)$ вычисляются достаточно просто, то возможно применение методов минимизации второго порядка, которые используют квадратичную часть разложения этой функции вряд Тейлора. Поскольку квадратичная часть разложения аппроксимирует функцию гораздо точнее, чем линейная, то естественно ожидать, что методы второго порядка сходятся быстрее, чем методы первого порядка, тем самым являются наиболее эффективными .

Рассмотрим алгоритм реализации данного метода, который состоит в последовательном выполнении следующих шагов:

1) Задаются ε, $x^{(0)}$, вычисляются, $f(x^{(0)}), f'(x^{(0)}), \left|f'(x^{(0)})\right|$; полагая что $k=1$
2) Вычисляется $f''(x^{k-1})$
3) Определяется $(f''(x^{k-1}))^{-1}$
4) Вычисляются $\Delta x^{(k)} = -f'(x^{k-1})(f''(x^{k-1}))^{-1}, \quad x^{(k)} = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)}, f'(x^{(k)}), \left\|f'(x^{(k)})\right\|$

5) Проверяется условие окончания вычислений $\| f'(x^{(k)}) \| \le \varepsilon$

Если оно выполняется, то полагая $x^* \cong x^{(k)}, f^* \cong f(x^{(k)})$ вычисления завершаются (x^*- искомая точка минимума функции). Если же условие не выполняется, то полагается $k = k+1$ и осуществляется переход к пункту 2 . Метод Ньютона находит минимум квадратичной функции за один шаг, независимо от начальной точки $x^{(0)}$, и степени овражности. Покажем это на конкретном примере. Все расчеты были получены путем реализации программы в среде программирования Pascal.

Пример. Методом Ньютона решить задачу безусловной минимизации

$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2 - 5 \to \min$ при $\varepsilon = 0,4;\ x^{(0)} = (0,2)$

Решение: Находим $f''(x)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}} = 4 \to f''(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Первая итерация.

Вычисляем $\Delta x^{(1)}: f''(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \to (f''(x^{(0)}))^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}$

$$\Delta x^{(1)} = -(-2;9) \times \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} = -(-1;2,25) = (1;-2,25)$$

Вторая итерация.

Вычисляем $\Delta x^{(2)}$: $f''(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \to (f''(x^{(0)}))^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}$,

$\Delta x^{(2)} = -(0;0) \times \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} = (0;0)$

Результаты вычислений запишем в таблицу.

№ итерации	Δx_1	Δx_2	x_1	x_2	$f(x)$	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}$	$\lVert f' \rVert$
0			0	2	5	-2	9	7
1	1	-2,25	1	-0,25	-6,625	0	0	0

Поскольку условие окончания вычисления выполнено ($\lVert f'(x^{(1)} \rVert \le \varepsilon = 0{,}1$), то вычисления завершаются. В результате решения задачи безусловной минимизации имеем $x^* \cong x^{(1)} = (1{,}00; -0{,}25), f^* = f(x^{(1)}) = -6{,}625$

Ответ: $x^* \cong (1{,}00; -0{,}25), f^* = -6{,}625$

Таким образом, мы убедились, что данный метод для квадратичной функции, на самом деле, находит минимум за один шаг. Однако сходимость данного метода в случае, когда функция не является квадратичной, существенно зависит от начальной точки $x^{(0)}$, которую необходимо выбирать как можно ближе к искомой точке минимума. Еще одним недостатком данного метода является высокая трудоемкость, обусловленная необходимостью вычисления и обращения на каждом шаге матрицы вторых производных минимизируемой функции.

Можно заметить, что реализация данного метода напрямую зависит от внимательности и подготовленности, так как необходимо работать с частными производными, поэтому малейшие недочеты могут привезти к грубым ошибкам.

Литература

1. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации*. – М.: Факториал пресс, 2002, -824 с.

2. Гончаров В. А. *Методы оптимизации*: учебное пособие. – М.: Высшее образование, 2009,- 215 с.