ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Сабиров Р.Р., студент

Бигаева Л.А., к.ф.-м.н., доцент

Бирскийфилиал УУНиТ, г.Бирск, Россия

Аннотация: В статье рассматривается применение метода Рунге-Кутта третьего порядка для численного решения задачи Коши. Подробно излагается алгоритм метода, анализируется его точность. Представлены результаты численного эксперимента, демонстрирующие эффективность метода на различных тестовых задачах.

Ключевые слова: метод Рунге-Кутта, задача Коши, обыкновенные дифференциальные уравнения, численные методы, точность.

Многие задачи в физике, инженерии и других областях науки приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Однако аналитическое решение таких уравнений возможно лишь для ограниченного числа случаев. В таких случаях применяются численные методы, позволяющие получить приближенное решение с заданной точностью. Один из наиболее распространенных и эффективных методов – это метод Рунге-Кутта.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Требуется найти приближенное решение функции $y(x)$с заданной точностью εна интервале $[x_0,\ x_n]$. Для ее решения методом Рунге-Кутта третьего порядка применяют итерационную формулу[2,3]:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{h}{6}\right)(r_1 + 4 \cdot r_2 + r_3), \text{где}$$

$h = \dfrac{x_n - x_0}{n} -$ шаг интегрирования,

$y_i -$ приближенное значение функции в $x_i = x_0 - ih,$

$$r_1 = hf(x_i, y_i), r_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{r_1}{2}\right),$$

$$r_3 = hf(x_i + h, y_i - r_1 + 2r_2).$$

Метод Рунге-Кутта третьего порядка имеет более высокую точность $O(h^4)$,чем точность метода Эйлера - $O(h^2)$, а точность того же метода Рунге-Кутта, но второго порядка - $O(h^3)$[2,3].

Рассмотрим тестовую задачу $y' = x + y$, $y(0) = 1$, где $y_{точн}(x) = 2 \cdot e^x - x - 1$, при двух разных значениях h: 0,1 и 0,05. Для удобства составим таблицу со всеми значениями.

Метод	Шаг h	Приближенное решение y(1)	Погрешность решения
Метод Эйлера	0,1	3,1875	0,2491
	0,05	3,3066	0,13
Метод Рунге-Кутта 2-го порядка	0,1	3,4282	0,0084
	0,05	3,4344	0,0022
Метод Рунге-Кутта 3-го порядка	0,1	3,4364	0,0002
	0,05	3,4365	0,0001
Аналитическое (точное решение)		3,4366	

Результаты данной таблицы подтверждают, что рассматриваемый в статье метод является более точным.

Для данной тестовой задачи реализуем программу на языке программирования Python. Кодпрограммы:

```
importmath
deff(x, y):
  returnx+y
```

```
defrunge_kutta_3rd_order(x0, y0, xn, h):
  x=x0
  y=y0
  results= [(x, y)]
  whilex<xn:
    k1=h*f(x, y)
    k2=h*f(x+h/2, y+k1/2)
    k3=h*f(x+h, y-k1+2*k2)
    y=y+ (k1+4*k2+k3) /6
    x=x+h
    results.append((x, y))
    returnresults
x0=0
y0=1
xn=1
h=0.1
results=runge_kutta_3rd_order(x0, y0, xn, h)
print("Метод Рунге-Кутта 3-го порядка:")
print("x\t\ty")
print("-"*20)
analytical_solution=lambdax: 2*math.exp(x) -x-1
forx, yinresults:
    analytical_y=analytical_solution(x)
    error=abs(analytical_y-y)
    print(f"{x:.1f}\t\t{y:.4f}\t(Analytical: {analytical_y:.4f}, Error: 
{error:.4f})")
```

Данный метод является эффективным численным методом для решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка. Однако, для более сложных задач стоит рассматривать методы более высоких порядков или иные методы.

Литература

1. Бигаева, Л. А. Курс лекций по численным методам : Учебное пособие для студентов физико-математического факультета / Л. А. Бигаева, И. И. Латыпов. – Бирск : Башкирский государственный университет, 2018. – 138 с. – EDNUMYXHX.

2. Лапчик, М. П. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; Под ред. М. П. Лапчика. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 384 с.

3. Латыпов, И.И. Компьютерное моделирование / И. И. Латыпов, Л. А. Бигаева. – Бирск :Бирский филиал Уфимского университета науки и технологии, 2023. – 142 с. – EDNRRSXBP.